ループ付き完全グラフから決まる行列の固有値について

矢澤明喜子

信州大学

2020 年 5 月 2 日

Outline

Outline

準備： グラフについて

- $[n] = \{ 1, 2, \ldots, n \}$
- $\binom{[n]}{2} = \{ \{ i, j \} \mid i, j \in [n], i < j \}$

Definition (完全グラフ)

グラフ

$$K_n = (V(K_n), E(K_n)) = \left([n], \binom{[n]}{2} \right)$$

を n 頂点の完全グラフという.

Remark

n 頂点の完全グラフの辺の個数は $\binom{n}{2}$ である.

準備： グラフについて

- $E_n = \{\,\{\,i, i\,\} \mid i \in [n]\,\}$ 　 ($\{\,i, i\,\}$: 多重集合)

Definition (ループ付き完全グラフ)

グラフ

$$\mathring{K}_n = (V(\mathring{K}_n), E(\mathring{K}_n)) = \left([n], \binom{[n]}{2} \cup E_n\right)$$

を n 頂点のループ付き完全グラフという.
E_n の元を (自己) ループという.

Remark

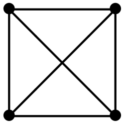
n 頂点のループ付き完全グラフの辺の個数は $\binom{n}{2} + n = \binom{n+1}{2}$ である.

グラフから決まる行列

グラフに対して, 以下のような行列を考える:

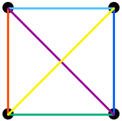
- 行列の添え字集合がグラフの辺集合.
- 各成分の値が添え字の辺のなす部分グラフの同型類によって決まる.

例: K_4 の場合



- K_4 の辺集合が添え字集合であるので, 6 次正方行列を考える.
- 各成分の値が添え字の辺のなす部分グラフの同型類によって決まる.

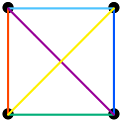
例: K_4 の場合



- K_4 の辺集合が添え字集合であるので, 6 次正方行列を考える.
- 各成分の値が添え字の辺のなす部分グラフの同型類によって決まる.

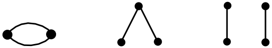
$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} & \begin{pmatrix} & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{pmatrix} \end{array}$$

例: K_4 の場合

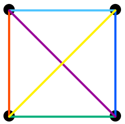


- K_4 の辺集合が添え字集合であるので, 6 次正方行列を考える.
- 各成分の値が添え字の辺のなす部分グラフの同型類によって決まる.

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} & \left(\begin{array}{cccccc} \; & \; & \; & \; & \; & \; \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{array}\right)
\end{array}
$$



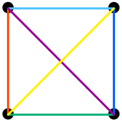
例: K_4 の場合



- K_4 の辺集合が添え字集合であるので, 6 次正方行列を考える.
- 各成分の値が添え字の辺のなす部分グラフの同型類によって決まる.

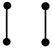
$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} & \begin{pmatrix} o & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{pmatrix} \end{array}$$

例: K_4 の場合

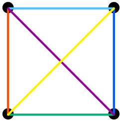


- K_4 の辺集合が添え字集合であるので, 6 次正方行列を考える.
- 各成分の値が添え字の辺のなす部分グラフの同型類によって決まる.

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} & \begin{pmatrix} o & p & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{pmatrix} \end{array}$$

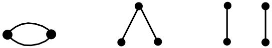


例: K_4 の場合

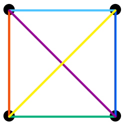


- K_4 の辺集合が添え字集合であるので, 6 次正方行列を考える.
- 各成分の値が添え字の辺のなす部分グラフの同型類によって決まる.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} & \begin{pmatrix} o & p & q & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{pmatrix} \end{array}$$



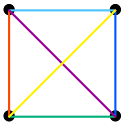
例: K_4 の場合



- K_4 の辺集合が添え字集合であるので, 6 次正方行列を考える.
- 各成分の値が添え字の辺のなす部分グラフの同型類によって決まる.

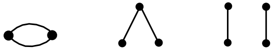
$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} & \begin{pmatrix} o & p & q & p & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{pmatrix} \end{array}$$

例: K_4 の場合

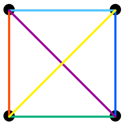


- K_4 の辺集合が添え字集合であるので, 6 次正方行列を考える.
- 各成分の値が添え字の辺のなす部分グラフの同型類によって決まる.

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\
\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} &
\begin{pmatrix}
o & p & q & p & p & \\
 & & & & & \\
 & & & & & \\
 & & & & & \\
 & & & & & \\
 & & & & &
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

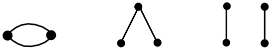


例: K_4 の場合

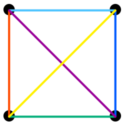


- K_4 の辺集合が添え字集合であるので, 6 次正方行列を考える.
- 各成分の値が添え字の辺のなす部分グラフの同型類によって決まる.

$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} &
\begin{pmatrix}
o & p & q & p & p & p \\
 & & & & & \\
 & & & & & \\
 & & & & & \\
 & & & & & \\
 & & & & &
\end{pmatrix}
\end{array}
$$



例: K_4 の場合



- K_4 の辺集合が添え字集合であるので, 6 次正方行列を考える.
- 各成分の値が添え字の辺のなす部分グラフの同型類によって決まる.

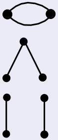
$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} &
\begin{pmatrix}
o & p & q & p & p & p \\
p & o & p & q & p & p \\
q & p & o & p & p & p \\
p & q & p & o & p & p \\
p & p & p & p & o & q \\
p & p & p & p & q & o
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Definition

完全グラフ K_n に対し, 以下で行列 H_{K_n} を定義する:

$$H_{K_n} = (h_{ef})_{e,f \in E(K_n)}.$$

$$ただし, h_{ef} = \begin{cases} o & e \cup f \cong \quad \text{(multiple edges)}, \\ p & e \cup f \cong \quad \text{(two edges shared one vertex)}, \\ q & e \cup f \cong \quad \text{(disjoint two edges)}. \end{cases}$$



Remark

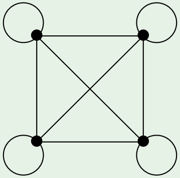
- 行列 H_{K_n} は $\binom{n}{2}$ 次正方行列
- 行列 H_{K_n} は対称行列

ループ付き完全グラフから決まる行列

グラフ $\mathring{K}_n$ に対して, 以下のような行列を考える:

- 行列の添え字集合が $\mathring{K}_n$ の辺集合.
- 各成分の値が添え字の辺のなす部分グラフの同型類によって決まる.

Example

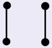
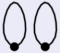
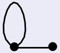
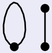


Definition

ループ付き完全グラフ $\mathring{K}_n$ に対し, 以下で行列 $H_{\mathring{K}_n}$ を定義する:

$$H_{\mathring{K}_n} = (h_{ef})_{e,f \in E(\mathring{K}_n)}.$$

ただし, $h_{ef} =$

- $o \quad e \cup f \cong$  (multiple edges),
- $p \quad e \cup f \cong$  (two edges shared one vertex),
- $q \quad e \cup f \cong$  (disjoint two edges),
- $a \quad e \cup f \cong$  (multiple loops),
- $b \quad e \cup f \cong$  (disjoint two loops),
- $c \quad e \cup f \cong$  (a loop and an edge shared one vertex),
- $d \quad e \cup f \cong$  (a loop and an edge).

Remark

- 行列 $H_{\mathring{K}_n}$ は $\binom{n+1}{2}$ 次正方行列
- 行列 $H_{\mathring{K}_n}$ は対称行列

Remark

- 行列 $H_{\mathring{K}_n}$ は $\binom{n+1}{2}$ 次正方行列
- 行列 $H_{\mathring{K}_n}$ は対称行列

Goal

K_n, $\mathring{K}_n$ から決まる行列 H_{K_n}, $H_{\mathring{K}_n}$ に対しその行列式を計算したい.

Outline

主結果: 完全グラフから決まる行列について

Theorem (主結果 1)

$n \geq 3$ とする．このとき，H_{K_n} の固有値とその固有空間の次元は以下の通り：

固有値	固有空間の次元
$o - 2p + q$	$\binom{n}{2} - n,$
$o + (n-4)p - (n-3)q$	$n - 1,$
$o + 2(n-2)p + \frac{(n-2)(n-3)}{2}q$	$1.$

Remark

固有ベクトルを求めることで固有値を求めた．

主結果: ループ付き完全グラフから決まる行列について

Theorem (主結果 2)

$n \geq 3$ とする.

$$
\begin{array}{rr}
H_{\mathring{K}_n} \text{ の固有値} & \text{固有空間の次元} \\
o - 2p + q & \binom{n+1}{2} - 2n, \\
\frac{1}{2}\left(\alpha + \beta + \sqrt{(\alpha+\beta)^2 - 4(\alpha\beta - \gamma)}\right) & n-1, \\
\frac{1}{2}\left(\alpha + \beta - \sqrt{(\alpha+\beta)^2 - 4(\alpha\beta - \gamma)}\right) & n-1, \\
\frac{1}{2}\left(\alpha' + \beta' + \sqrt{(\alpha'+\beta')^2 - 4(\alpha'\beta' - \gamma')}\right) & 1, \\
\frac{1}{2}\left(\alpha' + \beta' + \sqrt{(\alpha'+\beta')^2 - 4(\alpha'\beta' - \gamma')}\right) & 1.
\end{array}
$$

ただし, $\alpha = a - b$, $\alpha' = a + (n-1)b$, $\beta = o + (n-4)p - (n-3)q$, $\beta' = o + 2(n-2)p + \frac{(n-2)(n-3)}{2}q$, $\gamma = (n-2)(c-d)^2$, $\gamma' = \frac{n-1}{2}(2c + (n-2)d)^2$ とする.

Remark

$H_{\mathring{K}_n}$ の固有値

$$\frac{1}{2}\left(\alpha+\beta+\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4(\alpha\beta-\gamma)}\right),$$
$$\frac{1}{2}\left(\alpha+\beta-\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4(\alpha\beta-\gamma)}\right)$$

は次の行列

$$\begin{pmatrix} a-b & (n-2)(c-d) \\ c-d & o+(n-4)p-(n-3)q \end{pmatrix}$$

の固有値である．換言すると，上記固有値は以下の等式の解である:

$$\det\begin{pmatrix} \alpha-\lambda & (n-2)(c-d) \\ c-d & \beta-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2-(\alpha+\beta)\lambda+\alpha\beta-\gamma=0.$$

Remark

$H_{\mathring{K}_n}$ の固有値

$$\frac{1}{2}\left(\alpha' + \beta' + \sqrt{(\alpha'+\beta')^2 - 4(\alpha'\beta' - \gamma')}\right),$$
$$\frac{1}{2}\left(\alpha' + \beta' - \sqrt{(\alpha'+\beta')^2 - 4(\alpha'\beta' - \gamma')}\right)$$

は次の行列

$$\begin{pmatrix} a+(n-1)b & \frac{n-1}{2}(2c+(n-2)d) \\ 2c+(n-2)d & o+2(n-2)p+\frac{(n-2)(n-3)}{2}q \end{pmatrix}$$

の固有値である．換言すると，上記固有値は以下の等式の解である:

$$\det\begin{pmatrix} \alpha'-\lambda & \frac{n-1}{2}(2c+(n-2)d) \\ 2c+(n-2)d & \beta'-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - (\alpha'+\beta')\lambda + \alpha'\beta' - \gamma' = 0.$$

Corollary

$H_{\mathring{K}_n}$ の行列式は以下のとおり:

$$
\begin{aligned}
&(o-2p+q)^{\binom{n+1}{2}-2n} \\
&\qquad \times \det \begin{pmatrix} \alpha & (n-2)(c-d) \\ c-d & \beta \end{pmatrix}^{n-1} \\
&\qquad \times \det \begin{pmatrix} \alpha' & \frac{n-1}{2}\left(2c+(n-2)d\right) \\ 2c+(n-2)d & \beta' \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Outline

主結果の応用について

Goal

ループ付き完全グラフから決まる行列を使って, ある対称式の divided power による 2 次ヘッセ行列の行列式を計算したい.

Divided powers

- $\mathbb{K}$: 体 ($\operatorname{char}\mathbb{K} = 0$)
- 単項式 $x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n} \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ に対して, 以下のように定める:

$$\partial_i x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n} = \begin{cases} x_1^{m_1} \cdots x_i^{m_i - 1} \cdots x_n^{m_n}, & m_i > 0 \\ 0, & m_i = 0 \end{cases}$$

- ∂_i を変数 x_i に関する divided power と呼ぶ.
- $\mathbb{K}[\partial_1, \ldots, \partial_n] \curvearrowright \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$

Remark

$m_1, m_2, \ldots, m_n \in \{ 0, 1 \}$ のとき, divided powers は偏微分と思える.

Divided power による作用から決まる代数

斉次多項式 $F \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ に対し,

$$\mathrm{Ann}(F) = \{\, P \in \mathbb{K}[\partial_1, \ldots, \partial_n] \mid PF = 0 \,\},$$

$$A_F = \mathbb{K}[\partial_1, \ldots, \partial_n] / \mathrm{Ann}(F)$$

と定義する．このとき A_F は graded Artinian Gorenstein algebra である．
(⇔ Poincaré duality algebra)

Remark

$\deg F = s$ とすると, $A_F = \bigoplus_{k=0}^{s} A_k$.

Remark

偏微分作用素に対しても同様にして Gorenstein 代数が定義される．
斉次多項式 F に対し, divided power による作用から決まる Gorenstein 代数と, 偏微分作用素による作用から決まる Gorenstein 代数は, 一般には異なる．

Example

$F = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$ とする．このとき，$A_F = \bigoplus_{k=0}^{2} A_k$, $A_0 \cong \mathbb{K} \cong A_2$.

- Divided power による作用.

$$\partial_1 F = x_1 + 2x_2, \qquad \partial_2 F = 2x_1 + x_2$$

なので，

$$A_F \cong \mathbb{K} \oplus \mathbb{K}\partial_1 \oplus \mathbb{K}\partial_2 \oplus \mathbb{K}\partial_1\partial_2.$$

- 偏微分による作用.

$$\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_2} \in \mathrm{Ann}(F)$$

なので，

$$A_F \cong \mathbb{K} \oplus \mathbb{K}\frac{\partial}{\partial x_1} \oplus \mathbb{K}\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_2}.$$

主結果の応用について

Goal

ループ付き完全グラフから決まる行列を使って, ある対称式の divided power による 2 次ヘッセ行列の行列式を計算したい.

Divided power によるヘッセ行列

- F : 斉次多項式
- $\deg F = s$
- $A_F = \bigoplus_{k=0}^{s} A_k$
- Λ_k : A_k の基底

Definition

$0 \leq 2k \leq s$ に対し,

$$H_F^{(k)} = (P_i P_j F)_{P_i, P_j \in \Lambda_k}.$$

- $H_F^{(k)}$ を F の (divided power による)k 次ヘッセ行列という.
- $\det H_F^{(k)}$ を F の (divided power による)k 次ヘシアンという.

Example

$F = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$ とする．$A_F \cong \mathbb{K} \oplus \mathbb{K}\partial_1 \oplus \mathbb{K}\partial_2 \oplus \mathbb{K}\partial_1\partial_2$ であったので，
$\Lambda_0 = \{ 1 \}, \Lambda_1 = \{ \partial_1, \partial_2 \}$ ととれる．よって，

$$H_F^{(0)} = \left(F\right),$$

$$H_F^{(1)} = \begin{pmatrix} \partial_1^2 F & \partial_1\partial_2 F \\ \partial_2\partial_1 F & \partial_2^2 F \end{pmatrix}.$$

Example

$F = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$ とする．$A_F \cong \mathbb{K} \oplus \mathbb{K}\partial_1 \oplus \mathbb{K}\partial_2 \oplus \mathbb{K}\partial_1\partial_2$ であったので，
$\Lambda_0 = \{ 1 \}, \Lambda_1 = \{ \partial_1, \partial_2 \}$ ととれる．よって，

$$H_F^{(0)} = \left(F\right),$$
$$H_F^{(1)} = \begin{pmatrix} \partial_1^2 F & \partial_1\partial_2 F \\ \partial_2\partial_1 F & \partial_2^2 F \end{pmatrix}.$$

Example

$F = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$ とすると，$A_F \cong \mathbb{K} \oplus \mathbb{K}\partial_1 \oplus \mathbb{K}\partial_1\partial_2$ であるので，

$$H_F^{(0)} = (F),$$
$$H_F^{(1)} = (\partial_1^2 F).$$

主結果の応用について

Goal

ループ付き完全グラフから決まる行列を使って, ある対称式の divided power による 2 次ヘッセ行列の行列式を計算したい.

対称多項式

- $S_n \curvearrowright \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$
- $F \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ が対称 $\iff \forall w \in S_n, wF = F$

Example

- べき和対称多項式

$$p_l(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{1 \leq i \leq n} x_i^l,$$

- 基本対称式

$$e_l(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_l \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_l},$$

- すべての変数の積のべき

$$x_1^l \cdots x_n^l.$$

対称多項式のヘシアンの例

次の対称式の k 次ヘシアンに対して, それらが多項式として恒等的に 0 ではないということが知られている. さらに, k 次ヘシアンの各変数に 1 を代入した値が消えていない.

Example

(1) $2k \leq l$ に対し, ベキ和対称多項式 $p_l(x_1, \ldots, x_n)$ の k 次ヘシアン.

(2) ([Maeno–Numata]) $2k \leq l \leq n$ に対し, 基本対称式 $e_l(x_1, \ldots, x_n)$ の k 次ヘシアン.

(3) $n, l \geq 1, 2k \leq nl$ に対し, 単項式 $x_1^l \cdots x_n^l$ の k 次ヘシアン.

対称多項式のヘシアンの例

次の対称式の k 次ヘシアンに対して，それらが多項式として恒等的に 0 ではないということが知られている．さらに，k 次ヘシアンの各変数に 1 を代入した値が消えていない．

Example

(1) $2k \leq l$ に対し，ベキ和対称多項式 $p_l(x_1, \dots, x_n)$ の k 次ヘシアン．

(2) ([Maeno–Numata]) $2k \leq l \leq n$ に対し，基本対称式 $e_l(x_1, \dots, x_n)$ の k 次ヘシアン．

(3) $n, l \geq 1, 2k \leq nl$ に対し，単項式 $x_1^l \cdots x_n^l$ の k 次ヘシアン．

主結果の応用として…

基本対称式 $e_l(x_1^k, \dots, x_n^k)$ に対し，2 次ヘシアンのヘッセ行列の各変数に 1 を代入した値を計算する．

$F = e_l(x_1^k, \ldots, x_n^k)$ とする.

Remark

- $l = 1$,

$$e_l(x_1^k, \ldots, x_n^k) = p_k(x_1, \ldots, x_n).$$

- $k = 1$,

$$e_l(x_1^k, \ldots, x_n^k) = e_l(x_1, \ldots, x_n).$$

- $l = n$,

$$e_l(x_1^k, \ldots, x_n^k) = x_1^k \cdots x_n^k.$$

主結果の応用

- $F = e_l(x_1^k, \ldots, x_n^k)$
- $A_F = \bigoplus_{i=0}^{lk} A_i$
- Λ_i : A_i の基底

Proposition

A_F を考える．このとき，

$$\begin{aligned}
\Lambda_2 &= \{\, 2\,\text{次モニック単項式} \,\} \\
&= \{\, \partial_i \partial_j \mid i \leq j \,\} \\
&= \left\{\, \partial_i \partial_j \;\middle|\; \{\, i, j \,\} \in E(\mathring{K}_n) \,\right\}
\end{aligned}$$

主結果の応用

- $F = e_l(x_1^k, \dots, x_n^k)$
- $A_F = \bigoplus_{i=0}^{lk} A_i$
- Λ_i : A_i の基底

Proposition

A_F を考える．このとき，

$$\begin{aligned}\Lambda_2 &= \{\, 2\text{ 次モニック単項式} \,\} \\ &= \{\, \partial_i\partial_j \mid i \leq j \,\} \\ &= \left\{\, \partial_i\partial_j \,\middle|\, \{\, i, j \,\} \in E(\mathring{K}_n) \,\right\}\end{aligned}$$

F の 2 次ヘッセ行列の添え字集合はループ付き完全グラフの辺集合と対応している．

$$H_F^{(2)} = \left((\partial_i\partial_j)(\partial_k\partial_l)F\right)_{\partial_i\partial_j, \partial_k\partial_l \in \Lambda_2} = \left((\partial_i\partial_j)(\partial_k\partial_l)F\right)_{\{\, i,j \,\}, \{\, k.l \,\} \in E(\mathring{K}_n)}.$$

主結果の応用

Proposition

F を対称多項式とする．このとき，任意の i, j, k, l に対し

$$
\begin{aligned}
\partial_1^4 F\Big|_{x_t=1} &= \partial_i^4 F\Big|_{x_t=1}, \\
\partial_1^3 \partial_2 F\Big|_{x_t=1} &= \partial_i^3 \partial_j F\Big|_{x_t=1}, \\
\partial_1^2 \partial_2^2 F\Big|_{x_t=1} &= \partial_i^2 \partial_j^2 F\Big|_{x_t=1}, \\
\partial_1^2 \partial_2 \partial_3 F\Big|_{x_t=1} &= \partial_i^2 \partial_j \partial_k F\Big|_{x_t=1}, \\
\partial_1 \partial_2 \partial_3 \partial_4 F\Big|_{x_t=1} &= \partial_i \partial_j \partial_k \partial_l F\Big|_{x_t=1}.
\end{aligned}
$$

主結果の応用

Proposition

F を対称多項式とする．このとき，任意の i, j, k, l に対し

$$
\begin{aligned}
\partial_1^4 F\Big|_{x_t=1} &= \partial_i^4 F\Big|_{x_t=1} = (\partial_i^2)(\partial_i^2) F\Big|_{x_t=1}, \\
\partial_1^3 \partial_2 F\Big|_{x_t=1} &= \partial_i^3 \partial_j F\Big|_{x_t=1}, \\
\partial_1^2 \partial_2^2 F\Big|_{x_t=1} &= \partial_i^2 \partial_j^2 F\Big|_{x_t=1}, \\
\partial_1^2 \partial_2 \partial_3 F\Big|_{x_t=1} &= \partial_i^2 \partial_j \partial_k F\Big|_{x_t=1}, \\
\partial_1 \partial_2 \partial_3 \partial_4 F\Big|_{x_t=1} &= \partial_i \partial_j \partial_k \partial_l F\Big|_{x_t=1}.
\end{aligned}
$$

主結果の応用

Proposition

F を対称多項式とする．このとき，任意の i, j, k, l に対し

$$
\begin{aligned}
\partial_1^4 F\Big|_{x_t=1} &= \partial_i^4 F\Big|_{x_t=1} = (\partial_i^2)(\partial_i^2) F\Big|_{x_t=1}, \\
\partial_1^3 \partial_2 F\Big|_{x_t=1} &= \partial_i^3 \partial_j F\Big|_{x_t=1}, \\
\partial_1^2 \partial_2^2 F\Big|_{x_t=1} &= \partial_i^2 \partial_j^2 F\Big|_{x_t=1}, \\
\partial_1^2 \partial_2 \partial_3 F\Big|_{x_t=1} &= \partial_i^2 \partial_j \partial_k F\Big|_{x_t=1}, \\
\partial_1 \partial_2 \partial_3 \partial_4 F\Big|_{x_t=1} &= \partial_i \partial_j \partial_k \partial_l F\Big|_{x_t=1}.
\end{aligned}
$$

主結果の応用

Proposition

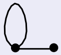
F を対称多項式とする．このとき，任意の i, j, k, l に対し

$$\begin{aligned}
\partial_1^4 F\Big|_{x_t=1} &= \partial_i^4 F\Big|_{x_t=1} = (\partial_i^2)(\partial_i^2) F\Big|_{x_t=1}, \\
\partial_1^3\partial_2 F\Big|_{x_t=1} &= \partial_i^3\partial_j F\Big|_{x_t=1} = (\partial_i^2)(\partial_i\partial_j) F\Big|_{x_t=1}, \\
\partial_1^2\partial_2^2 F\Big|_{x_t=1} &= \partial_i^2\partial_j^2 F\Big|_{x_t=1}, \\
\partial_1^2\partial_2\partial_3 F\Big|_{x_t=1} &= \partial_i^2\partial_j\partial_k F\Big|_{x_t=1}, \\
\partial_1\partial_2\partial_3\partial_4 F\Big|_{x_t=1} &= \partial_i\partial_j\partial_k\partial_l F\Big|_{x_t=1}.
\end{aligned}$$

主結果の応用

Proposition

F を対称多項式とする．このとき，任意の i, j, k, l に対し



$$
\begin{aligned}
\partial_1^4 F\Big|_{x_t=1} &= \partial_i^4 F\Big|_{x_t=1} = (\partial_i^2)(\partial_i^2)F\Big|_{x_t=1}, \\
\partial_1^3\partial_2 F\Big|_{x_t=1} &= \partial_i^3\partial_j F\Big|_{x_t=1} = (\partial_i^2)(\partial_i\partial_j)F\Big|_{x_t=1}, \\
\partial_1^2\partial_2^2 F\Big|_{x_t=1} &= \partial_i^2\partial_j^2 F\Big|_{x_t=1}, \\
\partial_1^2\partial_2\partial_3 F\Big|_{x_t=1} &= \partial_i^2\partial_j\partial_k F\Big|_{x_t=1}, \\
\partial_1\partial_2\partial_3\partial_4 F\Big|_{x_t=1} &= \partial_i\partial_j\partial_k\partial_l F\Big|_{x_t=1}.
\end{aligned}
$$

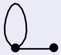
主結果の応用

Proposition

F を対称多項式とする．このとき，任意の i, j, k, l に対し

$$\partial_1^4 F\Big|_{x_t=1} = \partial_i^4 F\Big|_{x_t=1} = (\partial_i^2)(\partial_i^2) F\Big|_{x_t=1},$$

$$\partial_1^3\partial_2 F\Big|_{x_t=1} = \partial_i^3\partial_j F\Big|_{x_t=1} = (\partial_i^2)(\partial_i\partial_j) F\Big|_{x_t=1},$$



$$\partial_1^2\partial_2^2 F\Big|_{x_t=1} = \partial_i^2\partial_j^2 F\Big|_{x_t=1} = (\partial_i\partial_j)(\partial_i\partial_j) F\Big|_{x_t=1} = (\partial_i^2)(\partial_j^2) F\Big|_{x_t=1},$$

$$\partial_1^2\partial_2\partial_3 F\Big|_{x_t=1} = \partial_i^2\partial_j\partial_k F\Big|_{x_t=1},$$

$$\partial_1\partial_2\partial_3\partial_4 F\Big|_{x_t=1} = \partial_i\partial_j\partial_k\partial_l F\Big|_{x_t=1}.$$

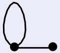
主結果の応用

Proposition

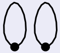
F を対称多項式とする．このとき，任意の i, j, k, l に対し

$$\partial_1^4 F\Big|_{x_t=1} = \partial_i^4 F\Big|_{x_t=1} = (\partial_i^2)(\partial_i^2)F\Big|_{x_t=1},$$

$$\partial_1^3\partial_2 F\Big|_{x_t=1} = \partial_i^3\partial_j F\Big|_{x_t=1} = (\partial_i^2)(\partial_i\partial_j)F\Big|_{x_t=1},$$



$$\partial_1^2\partial_2^2 F\Big|_{x_t=1} = \partial_i^2\partial_j^2 F\Big|_{x_t=1} = (\partial_i\partial_j)(\partial_i\partial_j)F\Big|_{x_t=1} = (\partial_i^2)(\partial_j^2)F\Big|_{x_t=1},$$


,


$$\partial_1^2\partial_2\partial_3 F\Big|_{x_t=1} = \partial_i^2\partial_j\partial_k F\Big|_{x_t=1},$$

$$\partial_1\partial_2\partial_3\partial_4 F\Big|_{x_t=1} = \partial_i\partial_j\partial_k\partial_l F\Big|_{x_t=1}.$$

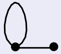
主結果の応用

Proposition

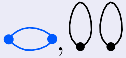
F を対称多項式とする．このとき，任意の i, j, k, l に対し

$$\partial_1^4 F\Big|_{x_t=1} = \partial_i^4 F\Big|_{x_t=1} = (\partial_i^2)(\partial_i^2) F\Big|_{x_t=1},$$

$$\partial_1^3\partial_2 F\Big|_{x_t=1} = \partial_i^3\partial_j F\Big|_{x_t=1} = (\partial_i^2)(\partial_i\partial_j) F\Big|_{x_t=1},$$



$$\partial_1^2\partial_2^2 F\Big|_{x_t=1} = \partial_i^2\partial_j^2 F\Big|_{x_t=1} = (\partial_i\partial_j)(\partial_i\partial_j) F\Big|_{x_t=1} = (\partial_i^2)(\partial_j^2) F\Big|_{x_t=1},$$



$$\partial_1^2\partial_2\partial_3 F\Big|_{x_t=1} = \partial_i^2\partial_j\partial_k F\Big|_{x_t=1},$$

$$\partial_1\partial_2\partial_3\partial_4 F\Big|_{x_t=1} = \partial_i\partial_j\partial_k\partial_l F\Big|_{x_t=1}.$$

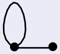
主結果の応用

Proposition

F を対称多項式とする．このとき，任意の i, j, k, l に対し

$$\partial_1^4 F\Big|_{x_t=1} = \partial_i^4 F\Big|_{x_t=1} = (\partial_i^2)(\partial_i^2)F\Big|_{x_t=1},$$

$$\partial_1^3\partial_2 F\Big|_{x_t=1} = \partial_i^3\partial_j F\Big|_{x_t=1} = (\partial_i^2)(\partial_i\partial_j)F\Big|_{x_t=1},$$



$$\partial_1^2\partial_2^2 F\Big|_{x_t=1} = \partial_i^2\partial_j^2 F\Big|_{x_t=1} = (\partial_i\partial_j)(\partial_i\partial_j)F\Big|_{x_t=1} = (\partial_i^2)(\partial_j^2)F\Big|_{x_t=1},$$

$$\partial_1^2\partial_2\partial_3 F\Big|_{x_t=1} = \partial_i^2\partial_j\partial_k F\Big|_{x_t=1},$$

$$\partial_1\partial_2\partial_3\partial_4 F\Big|_{x_t=1} = \partial_i\partial_j\partial_k\partial_l F\Big|_{x_t=1}.$$

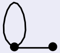
主結果の応用

Proposition

F を対称多項式とする．このとき，任意の i, j, k, l に対し

$$\partial_1^4 F\Big|_{x_t=1} = \partial_i^4 F\Big|_{x_t=1} = (\partial_i^2)(\partial_i^2)F\Big|_{x_t=1},$$

$$\partial_1^3\partial_2 F\Big|_{x_t=1} = \partial_i^3\partial_j F\Big|_{x_t=1} = (\partial_i^2)(\partial_i\partial_j)F\Big|_{x_t=1},$$



$$\partial_1^2\partial_2^2 F\Big|_{x_t=1} = \partial_i^2\partial_j^2 F\Big|_{x_t=1} = (\partial_i\partial_j)(\partial_i\partial_j)F\Big|_{x_t=1} = (\partial_i^2)(\partial_j^2)F\Big|_{x_t=1},$$

$$\partial_1^2\partial_2\partial_3 F\Big|_{x_t=1} = \partial_i^2\partial_j\partial_k F\Big|_{x_t=1} = (\partial_i\partial_j)(\partial_i\partial_k)F\Big|_{x_t=1} = (\partial_i^2)(\partial_j\partial_k)F\Big|_{x_t=1},$$

$$\partial_1\partial_2\partial_3\partial_4 F\Big|_{x_t=1} = \partial_i\partial_j\partial_k\partial_l F\Big|_{x_t=1}.$$

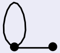
主結果の応用

Proposition

F を対称多項式とする．このとき，任意の i,j,k,l に対し

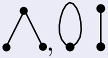
$$\partial_1^4 F\Big|_{x_t=1} = \partial_i^4 F\Big|_{x_t=1} = (\partial_i^2)(\partial_i^2)F\Big|_{x_t=1},$$

$$\partial_1^3\partial_2 F\Big|_{x_t=1} = \partial_i^3\partial_j F\Big|_{x_t=1} = (\partial_i^2)(\partial_i\partial_j)F\Big|_{x_t=1},$$



$$\partial_1^2\partial_2^2 F\Big|_{x_t=1} = \partial_i^2\partial_j^2 F\Big|_{x_t=1} = (\partial_i\partial_j)(\partial_i\partial_j)F\Big|_{x_t=1} = (\partial_i^2)(\partial_j^2)F\Big|_{x_t=1},$$

$$\partial_1^2\partial_2\partial_3 F\Big|_{x_t=1} = \partial_i^2\partial_j\partial_k F\Big|_{x_t=1} = (\partial_i\partial_j)(\partial_i\partial_k)F\Big|_{x_t=1} = (\partial_i^2)(\partial_j\partial_k)F\Big|_{x_t=1},$$



$$\partial_1\partial_2\partial_3\partial_4 F\Big|_{x_t=1} = \partial_i\partial_j\partial_k\partial_l F\Big|_{x_t=1}.$$

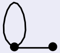
主結果の応用

Proposition

F を対称多項式とする．このとき，任意の i, j, k, l に対し

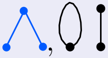
$$\partial_1^4 F\Big|_{x_t=1} = \partial_i^4 F\Big|_{x_t=1} = (\partial_i^2)(\partial_i^2)F\Big|_{x_t=1},$$

$$\partial_1^3\partial_2 F\Big|_{x_t=1} = \partial_i^3\partial_j F\Big|_{x_t=1} = (\partial_i^2)(\partial_i\partial_j)F\Big|_{x_t=1},$$



$$\partial_1^2\partial_2^2 F\Big|_{x_t=1} = \partial_i^2\partial_j^2 F\Big|_{x_t=1} = (\partial_i\partial_j)(\partial_i\partial_j)F\Big|_{x_t=1} = (\partial_i^2)(\partial_j^2)F\Big|_{x_t=1},$$

$$\partial_1^2\partial_2\partial_3 F\Big|_{x_t=1} = \partial_i^2\partial_j\partial_k F\Big|_{x_t=1} = (\partial_i\partial_j)(\partial_i\partial_k)F\Big|_{x_t=1} = (\partial_i^2)(\partial_j\partial_k)F\Big|_{x_t=1},$$



$$\partial_1\partial_2\partial_3\partial_4 F\Big|_{x_t=1} = \partial_i\partial_j\partial_k\partial_l F\Big|_{x_t=1}.$$

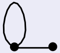
主結果の応用

Proposition

F を対称多項式とする．このとき，任意の i,j,k,l に対し

$$\partial_1^4 F\Big|_{x_t=1} = \partial_i^4 F\Big|_{x_t=1} = (\partial_i^2)(\partial_i^2)F\Big|_{x_t=1},$$

$$\partial_1^3\partial_2 F\Big|_{x_t=1} = \partial_i^3\partial_j F\Big|_{x_t=1} = (\partial_i^2)(\partial_i\partial_j)F\Big|_{x_t=1},$$



$$\partial_1^2\partial_2^2 F\Big|_{x_t=1} = \partial_i^2\partial_j^2 F\Big|_{x_t=1} = (\partial_i\partial_j)(\partial_i\partial_j)F\Big|_{x_t=1} = (\partial_i^2)(\partial_j^2)F\Big|_{x_t=1},$$

$$\partial_1^2\partial_2\partial_3 F\Big|_{x_t=1} = \partial_i^2\partial_j\partial_k F\Big|_{x_t=1} = (\partial_i\partial_j)(\partial_i\partial_k)F\Big|_{x_t=1} = (\partial_i^2)(\partial_j\partial_k)F\Big|_{x_t=1},$$

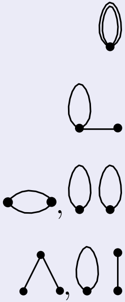
$$\partial_1\partial_2\partial_3\partial_4 F\Big|_{x_t=1} = \partial_i\partial_j\partial_k\partial_l F\Big|_{x_t=1}.$$

主結果の応用

Proposition

F を対称多項式とする．このとき，任意の i,j,k,l に対し

$$
\begin{aligned}
\partial_1^4 F\Big|_{x_t=1} &= \partial_i^4 F\Big|_{x_t=1} = (\partial_i^2)(\partial_i^2)F\Big|_{x_t=1}, \\
\partial_1^3\partial_2 F\Big|_{x_t=1} &= \partial_i^3\partial_j F\Big|_{x_t=1} = (\partial_i^2)(\partial_i\partial_j)F\Big|_{x_t=1}, \\
\partial_1^2\partial_2^2 F\Big|_{x_t=1} &= \partial_i^2\partial_j^2 F\Big|_{x_t=1} = (\partial_i\partial_j)(\partial_i\partial_j)F\Big|_{x_t=1} = (\partial_i^2)(\partial_j^2)F\Big|_{x_t=1}, \\
\partial_1^2\partial_2\partial_3 F\Big|_{x_t=1} &= \partial_i^2\partial_j\partial_k F\Big|_{x_t=1} = (\partial_i\partial_j)(\partial_i\partial_k)F\Big|_{x_t=1} = (\partial_i^2)(\partial_j\partial_k)F\Big|_{x_t=1}, \\
\partial_1\partial_2\partial_3\partial_4 F\Big|_{x_t=1} &= \partial_i\partial_j\partial_k\partial_l F\Big|_{x_t=1} = (\partial_i\partial_j)(\partial_k\partial_l)F\Big|_{x_t=1}.
\end{aligned}
$$

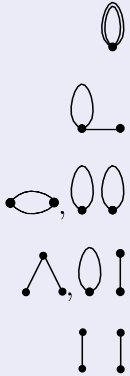


主結果の応用

Proposition

F を対称多項式とする．このとき，任意の i, j, k, l に対し

$$
\begin{aligned}
\partial_1^4 F\Big|_{x_t=1} &= \partial_i^4 F\Big|_{x_t=1} = (\partial_i^2)(\partial_i^2)F\Big|_{x_t=1}, \\
\partial_1^3\partial_2 F\Big|_{x_t=1} &= \partial_i^3\partial_j F\Big|_{x_t=1} = (\partial_i^2)(\partial_i\partial_j)F\Big|_{x_t=1}, \\
\partial_1^2\partial_2^2 F\Big|_{x_t=1} &= \partial_i^2\partial_j^2 F\Big|_{x_t=1} = (\partial_i\partial_j)(\partial_i\partial_j)F\Big|_{x_t=1} = (\partial_i^2)(\partial_j^2)F\Big|_{x_t=1}, \\
\partial_1^2\partial_2\partial_3 F\Big|_{x_t=1} &= \partial_i^2\partial_j\partial_k F\Big|_{x_t=1} = (\partial_i\partial_j)(\partial_i\partial_k)F\Big|_{x_t=1} = (\partial_i^2)(\partial_j\partial_k)F\Big|_{x_t=1}, \\
\partial_1\partial_2\partial_3\partial_4 F\Big|_{x_t=1} &= \partial_i\partial_j\partial_k\partial_l F\Big|_{x_t=1} = (\partial_i\partial_j)(\partial_k\partial_l)F\Big|_{x_t=1}.
\end{aligned}
$$



主結果の応用

Theorem

$F = e_l(x_1^k, \ldots, x_n^k)$ とする．$\tilde{H}_F^{(2)}$ を $H_F^{(2)}$ の各変数に 1 を代入した行列とする．このとき，

- $k \in \{ 2, 3 \}$ に対し，
$$\det \tilde{H}_F^{(2)} \neq 0.$$
したがって
$$\det H_F^{(2)} \not\equiv 0.$$
- $k \geq 4$ に対し，
$$\det \tilde{H}_F^{(2)} = 0.$$

ヘシアン判定法

Artinian Gorenstein algebra A_F に対し, A_F が強レフシェッツ性をもつかどうか判定する判定法がある.

ヘシアン判定法

Artinian Gorenstein algebra A_F に対し, A_F が強レフシェッツ性をもつかどうか判定する判定法がある.

- $A_F = \mathbb{K}[\partial_1, \ldots, \partial_n]/\operatorname{Ann}(F) = \bigoplus_{k=0}^{r} A_k$
- Λ_k: a basis for A_k

ヘシアン判定法

Artinian Gorenstein algebra A_F に対し, A_F が強レフシェッツ性をもつかどうか判定する判定法がある.

- $A_F = \mathbb{K}[\partial_1, \ldots, \partial_n]/\operatorname{Ann}(F) = \bigoplus_{k=0}^{r} A_k$
- Λ_k: a basis for A_k

Definition

A が強レフシェッツ性 (SLP) をもつ.

$\Leftrightarrow$ $\exists L \in A_1$ s.t. $\forall k \in \left\{ 0, 1, \ldots, \lfloor \frac{r}{2} \rfloor \right\}$, 以下の線形写像が全単射:

$$\begin{array}{rccc} \times L^{r-2k}: & A_k & \longrightarrow & A_{r-k} \\ & \Uplus & & \Uplus \\ & f & \longmapsto & L^{s-2k} \times f \end{array}$$

ヘシアン判定法

Artinian Gorenstein algebra A_F に対し, A_F が強レフシェッツ性をもつかどうか判定する判定法がある.

- $A_F = \mathbb{K}[\partial_1, \ldots, \partial_n]/\operatorname{Ann}(F) = \bigoplus_{k=0}^{r} A_k$
- Λ_k: a basis for A_k

Definition (k-th Hessian matrix)

$$H_F^{(k)} = \left(P_i P_j F\right)_{P_i, P_j \in \Lambda_k}.$$

Theorem (Watanabe, Maeno–Watanabe)

$\exists L \in A_1$ $s.t.$ $\times L^{s-2k} : A_k \longrightarrow A_{r-k}$ が全単射

$\Leftrightarrow$ $\det H_F^{(k)} \neq 0.$